ЕКОНОМІКА ТА УПРАВЛІННЯ НАЦІОНАЛЬНИМ ГОСПОДАРСТВОМ

УДК 004.94:[330.111.4+332.122:338.43]

Б. Г. Чемисов, к. г. н., доцент,
Д. Я. Хусаинов, д. ф.-м. н., профессор

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ СЕЛЬСКИХ ПОСЕЛЕНИЙ РЕГИОНОВ

Аннотация. *В статье рассмотрены особенности иерархической структуры городских и сельских поселений регионов в контексте правила “ранг - людность“. Предложена методика исследования иерархического распределения сельских поселений региона на основе математического моделирования.*

Ключевые слова: *регион, сельские и городские поселения, иерархическая структура, математическая модель.*

Б. Г. Чемісов, к. г. н., доцент,
Д. Я. Хусаінов, д. ф.-м. н., професор

ПРО ОДНУ МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ ІЄРАРХІЧНОЇ СТРУКТУРИ СІЛЬСЬКИХ ПОСЕЛЕНЬ РЕГІОНІВ

Анотація. *У статті розглянуті особливості ієрархічної структури міських і сільських поселень регіонів в контексті правила “ранг - людність“. Запропонована методика дослідження ієрархічного розподілу сільських поселень регіону на основі математичного моделювання.*

Ключові слова: *регіон, сільські та міські поселення, ієрархічна структура, математична модель.*

B. H. Chemisov, Candidate of Geographic Sciences, Associate Professor
D. Ya. Khusaynov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

ON A MATHEMATICAL MODEL OF HIERARCHICAL STRUCTURE OF RURAL SETTLEMENTS REGION

Abstract. *The features of hierarchical structure of urban and rural settlements regions in the context of rules "rank - population size" are described in the article. Methods to study the hierarchical distribution of rural settlements of region are suggested, based on mathematical modeling.*

Keywords: *region, rural and urban settlements, hierarchical structure, mathematical model.*

Актуальность темы. В исследованиях пространственной организации жизни общества важное место принадлежит изучению проблем городского и сельского расселения. Поиск методов выявления закономерностей формирования региональных систем расселения и направлений регулирования их развития представляет актуальный аспект исследований в контексте современных задач устойчивого развития

Постановка проблемы. Расселение населения, являясь одной из форм пространственной организации общества, в то же время оказывает существенное воздействие на региональную организацию производства. Формирование региональных систем расселения является сложным и многоаспектным процессом, на который оказывает влияние множество разнородных факторов социального, политического, этнического, экономического и природного характера, отличающиеся в каждом конкретном случае как по интенсивности влияния каждого из них, так и по результатам их совокупного воздействия. Этим обусловливается наличие разнообразных форм расселения населения, представляющих в конечном итоге один из результатов процесса взаимодействия общества и природы.

Вместе с тем формирование региональных систем поселений имеет внутренне присущие ему закономерности самоорганизации и саморегулирования. Поиск этих закономерностей становится более эффективным с применением количественных методов исследования и математического моделирования.

Анализ последних публикаций и исследований. По тематике расселения населения существует обширная литература, особенно в сфере градостроительной теории и практики (градоведение, урбанистика, градостроительство). Проблемы взаимосвязанного городского и сельского расселения, а также вопросы расселения сельского населения нашли освещение в работах ряда отечественных и зарубежных учёных: Ю.Р.Архипова, Х.Боса, В.Г.Давидовича, А.И. Доценко, С. А. Ковалёва, Д. Ф. Крисанова, В. Кристаллера, Г. М. Лаппо, А. Лёша, М. Мерлена, С. С. Мохначука, Е. И. Питюренко, В. В. Покшишевского, О. С. Пчелинцева, Г. Н. Рогожина, С. Г. Смидовича, Г. Ю. Стельмаха, Г. С. Фтомова, П. Хаггета, Б. С. Хорева и других. Следует отметить, что в контексте реформирования местного самоуправления и территориальной организации власти возрастает значимость проблем низового административно-хозяйственного районирования и связанного с ним сельского расселения населения. При решении этих проблем большое значение наряду с формированием массивов качественных качественных характеристик имеют методы математической обработки данных, полученных в ходе специальных исследований, а также построение соответствующих математических моделей. В то же время следует отметить, что многоаспектность и сложность указанных проблем вызывает необходимость дальнейшего поиска в отмеченном направлении.

Постановка задания. Разработка методики исследования иерархической структуры сельских поселений регионов на основе математического моделирования.

Изложение основного материала. В основу методики положена математическая модель, основанная на правиле Зипфа, согласно которому в региональной сети городов существует зависимость между людностью города и его ранговым номером [1, с. 192; 2, с. 127; 3, с. 26; 4].

Зависимость имеет вид

$$P_i = P_1 i^a ,\ a < 0 ,\ i = \overline{1,N} , \qquad (1)$$

где P_1 - людность (количество населения) самого большого города региона, P_i – людность i-го города региона, i – порядковый номер города, установлены в порядке убывания, a – фиксированный параметр зависимости. Для американских городов Зипф принимал $a = -1$. Таким образом, если построить последовательность городов с количеством населения P_1, $P_2, \ldots, P_N$, расположенных в порядке убывания, то формула Зипфа имела вид

$$P_i = \frac{P_1}{i},\ i = \overline{1,N} \qquad (2)$$

Но, как показали исследования ряда ученых [1, с. 195; 4], формула Зипфа не всегда соответствует фактическому материалу. Ю. В. Медведков модифицировал уравнение следующим образом [4, с. 108].

$$P_i = K^{-1} P_1 i^a ,\ a < 0 ,\ i = \overline{1,N} ,$$

где K^{-1} – коэффициент первенства главного города, a – мера контрастов внутри региональной системы городов, не обязательно равная единице. Более удобным для исследования являлась прологарифмированная формула

$$\ln P_i = \ln K^{-1} + \ln P_1 + a t_i ,\ a < 0 ,\ t_i = \ln i ,\ i = \overline{1,N} , \qquad (3)$$

или

$$X(i) = M + a t_i ,\ t_i = \ln i ,\ a < 0 ,\ X(i) = \ln P_i ,\ M = \ln \frac{P_1}{K} ,\ i = \overline{1,N} . \qquad (4)$$

Кроме того он предложил в качестве одной из характеристик иерархической структуры городов региональной системы коэффициент корреляции, характеризующий тесноту связи людности городов с их ранговым номером.

Рассчитанная по формуле (3) зависимость «ранг–людность» в региональной системе городских поселений носит линейный по переменной $t_i = \ln i$ м характер, а различные углы наклона прямой отражают особенности её проявления в разных регионах. Однако, как для малых, так и для мелких городов эта зависимость теряет линейный характер и на графике выражается отклонением фактических значений людности от прямой линии [3, стр. 27; 4].

Исследование сельских поселений региональных систем также показало отсутствие линейного характера зависимости между их людностью и ранговым номером. Иерархическая структура сельских поселений регионов расчитывалась по формуле, предложенной Б.Г.Чемисовым [5, стр. 189]

$$P_i = K^{-1} P_1^b i^{a \ln i},$$

или в виде

$$\ln P_i = \ln K^{-1} + b \ln P_1 + a(\ln i)^2$$

и на графиках по регионам зависимость «ранг – людность» отобразилась в виде различных парабол (рис.1; рис.2).

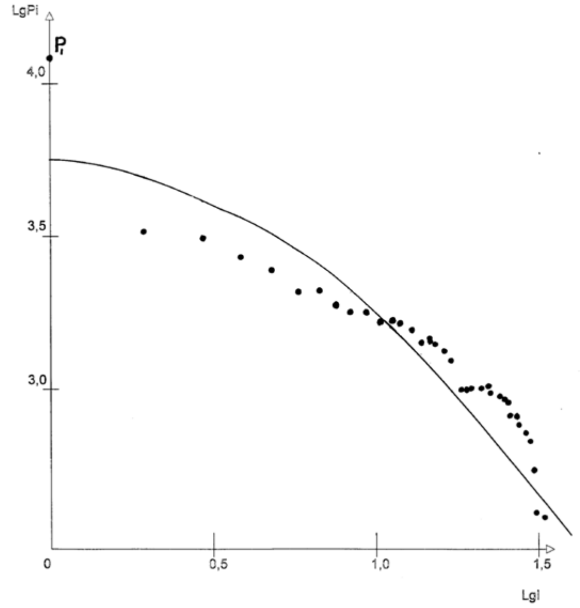

Рис. 1. Иерархическое распределение сельських поселений Жашковского района Черкасской области в логарифмическом поле (• - фактическая людность поселений)

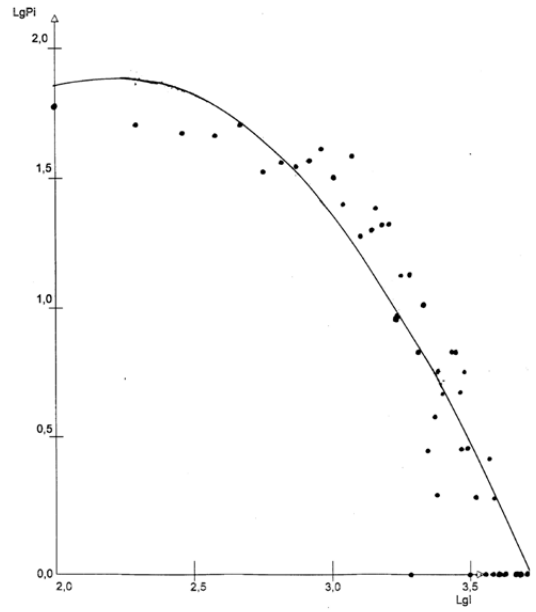

Рис. 2. Распределение сельских поселений Черкасской области в логарифмическом поле в зависимости от людности в интервале (• -фактическая людность поселений)

Позднее, для более адекватного выявления особенностей иерархической структуры сельских поселений была предложена более сложная формула [6, с.63]

$$P_i = K^{-1} P_1 i^{b + c \ln i}, \; i = \overline{1,N},$$

где b, c постоянные параметры (не обязательно положительные), отражающие специфику региона. Соответственно в прологарифмированном виде она имела вид

$$\ln P_i = \ln K^{-1} + \ln P_1 + b \ln i + c(\ln i)^2, \; i = \overline{1,N}$$

и более адекватно отражала иерархическую структуру сельских поселений регионов. Данная модель имеет вид квадратичной зависимости от логарифма

$$X(i) = M + bt_i + ct_i^2,\ X(i) = \ln P_i,\ t_i = \ln i,\ M = \ln\frac{P_1}{K}. \tag{5}$$

Для определения коэффициентов M, b, c, дающих наилучшее приближение можно использовать метод наименьших квадратов. Пусть известны численности населения $X(i) = \ln P_i$, $i = \overline{1,N}$ упорядоченно построенных сельских населенных пунктов и их численности населения равны $X(1)$, $X(2)$, ..., $X(N)$. Коэффициенты M, b, c зависимости выбираются из условия

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{M + b\ln i + c(\ln i)^2 - X(i)\right\}^2 \to \min .$$

Необходимое условие минимума приводит к необходимости решения системы трех уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}\left[M + b\ln i + c(\ln i)^2\right] = \sum_{i=1}^{N} X(i),$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[M + b\ln i + c(\ln i)^2\right]\ln i = \sum_{i=1}^{N} X(i)\ln i,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[M + b\ln i + c(\ln i)^2\right](\ln i)^2 = \sum_{i=1}^{N} X(i)(\ln i)^2,$$

Или

$$MN + b\sum_{i=1}^{N}\ln i + c\sum_{i=1}^{N}(\ln i)^2 = \sum_{i=1}^{N} X(i),$$

$$M\sum_{i=1}^{N}\ln i + b\sum_{i=1}^{N}(\ln i)^2 + c\sum_{i=1}^{N}(\ln i)^3 = \sum X(i)\ln i,$$

$$M\sum_{i=1}^{N}(\ln i)^2 + b\sum_{i=1}^{N}(\ln i)^3 + c\sum_{i=1}^{N}(\ln i)^4 = \sum X(i)(\ln i)^2 .$$

Используя правило Крамера, получаем

$$M = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ b = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ c = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{6}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N}\ln i & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^2 \\ \sum_{i=1}^{N}\ln i & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^2 & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^3 \\ \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^2 & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^3 & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^4 \end{vmatrix},\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N}X(i) & \sum_{i=1}^{N}\ln i & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^2 \\ \sum_{i=1}^{N}X(i)\ln i & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^2 & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^3 \\ \sum_{i=1}^{N}X(i)(\ln i)^2 & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^3 & \sum_{i=1}^{N}(\ln i)^4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} X(i) & \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^2 \\ \sum_{i=1}^{N} \ln i & \sum_{i=1}^{N} X(i)\ln i & \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^3 \\ \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^2 & \sum_{i=1}^{N} X(i)(\ln i)^2 & \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^4 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} \ln i & \sum_{i=1}^{N} X(i) \\ \sum_{i=1}^{N} \ln i & \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^2 & \sum_{i=1}^{N} X(i)\ln i \\ \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^2 & \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^3 & \sum_{i=1}^{N} X(i)(\ln i)^2 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Таким образом, для построения модели необходимо лишь иметь упорядоченную последовательность величин $X(1)$, $X(2)$, ..., $X(N)$.

Обозначим

$$A(N) = \sum_{i=1}^{N} \ln i = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln N = \ln(N!).$$

$$B(N) = \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^2 = (\ln 1)^2 + (\ln 2)^2 + \ldots + (\ln N)^2 = \quad \ln(1)^{\ln(1)} + \ln(2)^{\ln(2)} + \ldots + \ln(N)^{\ln(N)} =$$

$$\ln\left[1^{\ln(1)} 2^{\ln(2)} \ldots N^{\ln(N)}\right] = \ln \prod_{i=1}^{N} i^{\ln i}$$

$$C(N) = \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^3 = (\ln 1)^3 + (\ln 2)^3 + \ldots + (\ln N)^3 = = \ln(1)^{\ln^2(1)} + \ln(2)^{\ln^2(2)} + \ldots + \ln(N)^{\ln^2(N)} =$$

$$\ln\left[1^{\ln^2(1)} 2^{\ln^2(2)} \ldots N^{\ln^2(N)}\right] = \ln\left[\prod_{i=1}^{N} i^{\ln^2 i}\right],$$

$$D(N) = \sum_{i=1}^{N} (\ln i)^4 = (\ln 1)^4 + (\ln 2)^4 + \ldots + (\ln N)^4 = \ln\left[1^{\ln^3(1)} 2^{\ln^3(2)} \ldots N^{\ln^3(N)}\right] = \ln\left[\prod_{i=1}^{N} i^{\ln^3 i}\right].$$

Тогда получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & A(N) & B(N) \\ A(N) & B(N) & C(N) \\ B(N) & C(N) & D(N) \end{vmatrix}. \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} X(i) & A(N) & B(N) \\ \sum_{i=1}^{N} X(i)\ln i & B(N) & C(N) \\ \sum_{i=1}^{N} X(i)(\ln i)^2 & C(N) & D(N) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} X(i) & B(N) \\ A(N) & \sum_{i=1}^{N} X(i)\ln i & C(N) \\ B(N) & \sum_{i=1}^{N} X(i)(\ln i)^2 & D(N) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} N & A(N) & \sum_{i=1}^{N} X(i) \\ A(N) & B(N) & \sum_{i=1}^{N} X(i)\ln i \\ B(N) & C(N) & \sum_{i=1}^{N} X(i)(\ln i)^2 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Выше была описана математическая модель иерархической структуры сельских поселений административного района Украины.

Анализ зависимости “ранг-людность” сельских поселений административной области выполняется в соответствие с той же методикой, которая изложена выше, но с учётом ряда особенностей.

Принимая во внимание, что в административной области количество сёл намного больше нежели в административном районе, зависимость “ранг - людность” в этом случае рассматривается как зависимость между количеством сел и их людностью в соответствующих интервалах. Например:

Интервалы людности (чел.)	Число сельских поселений
...	...
401 – 300	45
301 - 200	49
201 - 100	53
101 - 1	60

Так, число поселений, в которых проживает от 1 до 100 чел. составляет 60 сел, количество поселений с численностью от 101 до 200 жителей - 53 села и т. д. После усреднения интервалов людности получаем:

Pi	*I*
…	…
350	45
250	49
150	53
50	60

Выводы. Представленная математическая модель вполне адекватно, на наш взгляд, отражает особенности иерархической структуры сельких поселений регионов.

Литература

1. Мерлен П. Город. Количественные методы изучения / П. Мерлен; [пер. с франц.] - М.: Прогресс, 1977. – 260 с.
2. Хаггет П. Пространственный анализ в экономической географии / П. Хаггет; [пер. с англ.] - М.: Прогресс, 1965. – 391 с.
3. Бос Х. Размещение хозяйства / Х. Бос; [пер. с англ.] – М.: Прогрес, 1970. – 157 с.
4. Количественные исследования в экономической географии // Сборник докладов на семинаре. - М.: МГУ, 1964.- 175 с.
5. Чемісов Б. Г. Територіальна зосередженість виробництва як чинник залежності «ранг-людність» в регіональній системі поселень / Б. Г. Чемісов // Сіверянський літопис. – 1999. – №5 – С. 187-196.
6. Чемисов Б. Г. К вопросу о моделировании структуры системы поселений / Б. Г. Чемисов // Моделирование и исследование устойчивости процессов. Тезисы докладов конференции (26-28 мая 1992 г.) Часть II – Киев: С. 62-63.
7. Хусаінов Д. Я. Моделювання динамічних систем / І. І. Харченко, А. В. Шатирко, Д. Я. Хусаінов – К.: ВПЦ Київського університету, 2011. – 135 с.
8. Самарский А. А. Математическое моделирование: идеи, методы, примеры) / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 316 с.

References

1. Pierre Merlin (1973). *Méthodes quantitatives et espace urbain.* Paris, Masson et Cie.
2. Peter Haggett (1965). *Locational Analysis in Human Geography.*

3. Bos, Kh. (1970). Razmeshchenye khoziaistva [Accommodation of economy]. Moscow: Progress [in Russian].

4. Kolichestvennye issledovaniya v ekonomicheskoy geografii [Quantitative investigations in the economic geography]. (1964). *Sbornik dokladov na seminare - Collection of reports at the seminar.* Moscow: MSU [in Russian].

5. Chemisov, B.G. (1999). Terytorialna zoseredzhennist vyrobnytstva yak chynnyk zalezhnosti ,,rang – liudnist'' v regionalnii systemi poselen [The territorial concentration of production as a factor of dependence "rank-humanity" in the regional system of settlements]. *Siverianskii lytopys – Siverianskyi litopys, 5,*187 – 196 [in Ukrainian].

6. Chemisov, B. G. (1992). K voprosu o modelirovanii struktury sistemy poseleniy [The question of modeling the structure of the system settlements]. *Proceedings from: Modelirovanie i issledovanie ustoychivosti protsessov. Tezisy dokladov konferentsii (26-28 maya 1992 g.) Chast II - Kiev – Modeling and investigation of sustainability processes. Thesises of the reports of conference (26-28 May 1992) Part 2 - Kyiv.* [in Ukrainian].

7. Khusainov, D.Ya., Kharchenko, I.I., & Shatyrko, A.V. (2011). *Modeliuvannia dynamichnykh system [Modeling of dynamic systems].* Kyiv: V.P.Ts. Kyivskogo universytetu [in Ukrainian].

8. Samarskiy, A. A., & Mikhailov., A.P. (1997). *Matematicheskoe modelirovanie: idei, metody, primery [Mathematical modeling: ideas, methods, examples].* Moscow: Nauka, Fizmatlit [in Russian].

Надійшла 09.04.2015